УДК 519.61

НЕОПРЕДЕЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ КАК ПЕРЕПИСЫВАНИЕ ТЕРМОВ: ИНТЕГРАЛЫ, СОДЕРЖАЩИЕ ТАНГЕНС *

© 2012 г. Х. Ху, И. Хоу, А.Д. Рич и Д.Д. Джеффри,
Факультет прикладной математики, Вестерн университет
ул. Ричмонд, д. 1151, Лондон, Онтарио, Канада N6A 5B7
E-mails: junruihu@gmail.com, yhou26@uwo.ca, Albert_Rich@msn.com, djeffrey@uwo.ca

Поступила в редакцию

Рассказывается о проекте разработки системы правил переписывания термов для неопределенного интегрирования. Описывается модуль для подынтегральных выражений, содержащих тангенс.

1. ВВЕДЕНИЕ

Используемые в системах компьютерной алгебры стили программирования часто рассматриваются как основанные либо на переписывании термов, либо на вычислении выражений.

Например, Mathematica часто рассматривается как система, основанная на переписывании термов [1], а Maple — гораздо реже. Различие, конечно же, в соотношении этих стилей, так как во всех доступных системах заметны элементы их обоих. Двойственность отчетливо проявляется в неопределенном интегрировании. Наиболее известные алгоритмы основаны на вычислениях. Например, алгоритмы Риша [7] и Ротштейна-Трагера-Лазара-Риобо [8, 9, 5] — вычислительные. Но эти алгоритмы не универсальны, и для многих интегралов приходится (или оказывается более предпочтительным) применять системы переписывающих правил. Некоторые из таких ситуаций мы обсудим ниже.

Несмотря на высказанные сомнения [2], современные методы переписывающих правил становятся все более алгоритмичными и детерминированными, и мы отдаем предпочтение этим методам для нашей схемы интегрирования. Мы учли успех и популярность программ, которые могут показывать пошаговые вычисления. Такие программы называются ‘показать шаг’ или ‘один шаг’. Они предлагаются, например, в WolframAlpha, Derive и в ряде учебных программ для изучения основ математического анализа.

Предложенная в [6] схема основана на системе правил переписывания термов и состоит из правил преобразований, хранящихся в открытом для доступа репозитории вместе с утилитами, которые можно использовать в различных системах компьютерной алгебры. Этот репозиторий представляет собой *не* таблицу интегралов, а небольшое множество правил. Корректность преобразований — не единственная цель нашего проекта. *Качество* интегральных выражений оценивается с помощью нескольких критериев, которые позволяют решить, включать ли правило интегрирования в репозиторий. Предположим, что подынтегральное выражение $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$. Тест для включения основан на следующих критериях, которые мы обсудим подробнее в следующем разделе.

- Корректность: требуем, чтобы выполнялось $F'(x) = f(x)$.
- Простота: ищем наиболее простую форму для интеграла. У нас прагматический подход и наша цель — получить наиболее короткое по длине выражение.
- Непрерывность: стараемся, чтобы каждое выражение было непрерывным в максимально возможной области [4].
- Эстетика: исходим из несколько принципов выбора математически красивых формул.
- Использование: правила должны быть подходящими для стиля ‘показать шаг’ (см. раздел 2.5).
- Эффективность: путь к ответу должен быть, насколько это возможно, прямым, а множество правил — компактным.

Ниже наш репозиторий будет обрисован подробнее.

*Перевод с английского Е.С. Шемяковой.

2. Обсуждение критерия выбора правил

Следующий пример позволит обсудить несколько аспектов цели нашего проекта. Рассмотрим пять возможных выражений для одного и того же интеграла:

$$\int \sqrt{-2\tan x}\,dx = -\tfrac{1}{2}\ln\left(2-2\tan x-2\sqrt{-2\tan x}\,\right) - \arctan\left(\sqrt{-2\,\tan x}-1\right) + \tfrac{1}{2}\ln\left(2-2\tan x+2\sqrt{-2\tan x}\right) - \arctan\left(\sqrt{-2\tan x}+1\right)\ , \tag{1}$$

$$\int \sqrt{-2\tan x}\,dx = \tag{2}$$

$$\frac{\sqrt{-\mathrm{Tan}[x]}}{2\sqrt{\mathrm{Tan}[x]}}\left(-2\mathrm{ArcTan}\left[1-\sqrt{2}\sqrt{\mathrm{Tan}[x]}\right] +2\mathrm{ArcTan}\left[1+\sqrt{2}\sqrt{\mathrm{Tan}[x]}\right] + \mathrm{Log}\left[1-\sqrt{2}\sqrt{\mathrm{Tan}[x]}+\mathrm{Tan}[x]\right] -\mathrm{Log}\left[1+\sqrt{2}\sqrt{\mathrm{Tan}[x]}+\mathrm{Tan}[x]\right]\right)\ , \tag{3}$$

$$= \ln\cos x + \ln(1+\sqrt{-2\tan x}-\tan x) + \arctan\frac{1+\tan x}{\sqrt{-2\tan x}}\ , \tag{4}$$

$$= -\arctan\frac{\sqrt{-2\tan x}}{1+\tan x} + \operatorname{arctanh}\frac{\sqrt{-2\tan x}}{1-\tan x}\ , \tag{5}$$

$$= \arctan\frac{1+\tan x}{\sqrt{-2\tan x}} + \operatorname{arctanh}\frac{1-\tan x}{\sqrt{-2\tan x}}\ . \tag{6}$$

Выражение (1) получено в Maple 16; выражение (3) получено в Mathematica 8; выражения (4) – (6) получены в рамках нашего подхода. Рассмотрим эти выражения с точки зрения сформулированных критериев.

2.1. Корректность

Обозначим через f и F подынтегральное выражение и первообразную. Проверка равенства $F' = f$ требует дифференцирования. В компьютерной алгебре существуют давние разногласия по поводу выбора из двух возможностей

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln x\ , & \text{комплексный случай,} \\ \ln|x|\ , & \text{вещественный случай.} \end{cases} \tag{7}$$

В репозитории все правила преобразований верны для комплексного случая. В нашем примере подынтегральная функция становится чисто мнимой на интервалах $(n\pi, n\pi+\pi/2)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Отметим, что проверка равенства $F' = f$, основанная на использовании какой-то системы компьютерной алгебры, может быть нетривиальной задачей. Например, Maple не может полностью проверить (4).

2.2. Простота

Последние три выражения в нашем примере, очевидно, короче и проще, чем первые два. Постоянная проблема систем компьютерной алгебры — рост размера выражений. Системы компьютерной алгебры очень часто не дают максимального упрощения выражений, которые содержат интегралы. Во-первых, потому, что самая короткая форма может отличаться на константу от данного выражения, и таким образом только алгебраические упрощения не приведут к цели. Во-вторых, точки ветвления могут сделать данное выражение алгебраически отличным от его короткой формы. Другими словами, два выражения могут различаться на кусочно-постоянное выражение.

Таким образом, интегрирующая система должна искать наиболее простые формулы, не рассчитывая на успех алгебраического упрощения. Это, в частности, видно по результатам применения алгоритма интегрирования Риша, которые получаются без учета ветвления.

2.3. Непрерывность

Подынтегральное выражение $\sqrt{-2\tan x}$ имеет особенность при $x = n\pi + \pi/2$ и непрерывно в других точках. При $x = n\pi$ функция меняется от действительной к мнимой, но она непрерывна в этих точках. Таким образом, выражение для ее интеграла должно быть непрерывным, за исключением, возможно, точек $x = (n+1/2)\pi$. Мы видим, что выражение (5) имеет разрывы в $\tan x = \pm 1$. Поэтому другие выражения более предпочтительны. Объединив непрерывность с простотой, мы можем сократить диапазон выбора предпочтительного выражения до (6), (4). Дополнительно отметим, что подынтегральное выражение интегрируемо в особых точках, и можно было бы потребовать, чтобы интегральное выражение было бы там непрерывно. Ни одно из выражений не имеет определенного значения при $x = n\pi + \pi/2$, потому определенные интегралы с пределами интегрирования в этих точках должны быть получены с использованием односторонних пределов.

Далее отметим, что условия непрерывности и простоты могут конфликтовать. Рассмотрим пример использования алгоритма Лазара-Риобу [5]:

$$\int \frac{x^2+2}{x^4-3x^2+4}\,dx = \arctan\frac{x}{2-x^2}\ , \tag{8}$$

$$= \arctan\left(2x+\sqrt{7}\right) + \arctan\left(2x-\sqrt{7}\right)\ . \tag{9}$$

Выражение с разрывами короче, и будет казаться более простым большинству пользователей. При росте степеней полиномов разница между длинами выражений возрастает.

2.4. *Эстетика*

> Красота — важнейший критерий. Уродству нет места в математике. (Г.Х. Харди [3])

Сравнивая (4) и (6), мы видим, что (6) содержит две родственные функции: arctan и arctanh. Хотя arctanh можно выразить через логарифмы, выражение (6) с его симметриями математически красивее, чем остальные выражения.

Аналогичный принцип касается связи между формами подынтегрального выражения и интеграла. Следующий интеграл был получен с помощью Maple 16:

$$\int \sqrt{2\tan x}\; dx = \frac{\sqrt{\tan x}\cos x \arccos\left(\cos x - \sin x\right)}{\sqrt{\cos x \sin x}} - \ln\left(\cos x + \sqrt{2}\sqrt{\tan x}\cos x + \sin x\right) \ . \quad (10)$$

В отличие от (1), полученного тоже с помощью Maple, эта формула содержит целый набор функций, не входящих в подынтегральное выражение. Кроме того, связывающая проблемы (1) и (10) очевидная симметрия $x \to -x$ не видна в ответах.

Мы предпочитаем в таких случаях формулу, которая функционально ближе к подынтегральному выражению.

2.5. *Использование*

Способ записи правил отражается на каждом шаге при пошаговом выполнении. Некоторые системы используют многочисленные подстановки в процессе решения. Это отражает то, как человек решал бы эту задачу, но такой подход труден для восприятия, так как пользователю придется следить за всеми заменами. Простым примером является интеграл вида $\int f(ax+b)\,dx$. Хотя человек может сразу написать $y = ax + b$, а затем работать с y, мы предпочитаем работать с более длинной формой и освободить пользователей от необходимости следить за заменами.

3. ФОРМА ПРАВИЛ

Каждая запись в репозитории состоит из трех функциональных частей, в совокупности они определяют правило:

1. Преобразование. Отображает интеграл в выражение, которое содержит как термы, свободные от интегралов, так и новые (более простые) интегралы.

2. Условия достоверности. (Так как интегралы в части 1 обычно содержат параметры, эти условия обеспечивают корректность преобразований.)

3. Условия упрощения. Подтверждают, что преобразование является желательным, и что любой новый интеграл или интегралы после дальнейших преобразований приведут к решению исходной проблемы.

Записи могут содержать и не имеющие функциональной роли сведения, такие, как ссылки на литературу.

Одна из задач нашего проекта — добиться того, чтобы условия, определяющие правила, взаимно исключали друг друга. Это означает, что если заданы все параметры для любого подынтегрального выражения, то только один набор условий оказывается выполненным, и, таким образом, только одно правило может быть применено.

В качестве примера рассмотрим преобразование (21), приведенное в приложении (раздел 7). Множитель $(m+n+1)$ в левой части должен быть отличен от нуля, чтобы равенство можно было бы использовать в качестве преобразования. Таким образом, условие $m + n + 1 \neq 0$ должно быть указано как условие достоверности для этого правила. Кроме того, преобразование уменьшает показатель $T_1 = \tan(c + dx)$ с m до $m - 1$, и необходимо выполнение $m \geq 1$ для того, чтобы претендовать на упрощение. Таким образом, это становится условием упрощения.

Похожее можно видеть в преобразовании (18). В случае $C = 0$ оно сводится к тривиальному равенству.

4. ВЫРАЖЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ТАНГЕНС

Наш новый модуль работает с выражениями вида

$$\tan^m(c+dx)(a+b\tan(c+dx))^n * \left(A + B\tan(c+dx) + C\tan^2(c+dx)\right) \ ,$$

где $a, b, c, d, A, B, C \in \mathbb{C}$ и $m, n \in \mathbb{R}$ — произвольные параметры. Это выражение не всегда интегрируемо. Цель состоит в том, чтобы найти все случаи, в которых оно интегрируемо. Не исключается, что α и β останутся символьными.

Стоит прокомментировать этот выбор подынтегрального выражения, особенно наличие в нем последнего множителя. Приложение в конце статьи содержит набор рекурренций, которые позволяют упрощать подынтегральное выражение до тех пор, когда его можно будет проинтегрировать. Нами установлено, что последний множитель необходим для рекурренций. Даже если мы положим $B = C = 0$, в этом выражении, один шаг редукции интеграла приведет к появлению дополнительных термов. Примечательно, что в случае $a^2 + b^2 = 0$, подынтегральное выражение можно привести к более простой форме. Соответствующие рекурренции также включены в приложение.

Одним из стандартных подходов к таким интегралам, используемых другими системами, является замена $u = \tan(c + dx)$. Удаляются все тригонометрические функции, в итоге возникает квазирациональная функция от u. Другая подобная замена — замена Вейерштрасса $u = \tan((c + dx)/2)$, но мы ее не используем. С математической точки зрения она приводит к проблеме обратимости преобразования, так как арктангенс имеет точки ветвления. С программной точки зрения такая замена снижает независимость модуля. Кроме того, сформулированный ранее эстетический принцип означает, что мы стараемся использовать те функции, которые уже входят в подынтегральное выражение. Это относится как к промежуточным выводам, так и к окончательному выражению.

Двенадцать преобразований (рекурренций), перечисленных в приложении, используются для рекуррентного приведения подынтегрального выражения к форме, для которой интеграл известен. Приведем пример применения правил.

5. ПРИМЕР РЕДУКЦИИ

Чтобы сосредоточиться на главной идее, мы положим некоторые константы в подинтегральном выражении равными нулю (см. последний раздел предыдущей секции) и рассмотрим интеграл:

$$\int \tan(1+i+x) * \frac{\left(4 - 12\tan(1+i+x) + 9\tan^2(1+i+x)\right)}{(2 - 3\tan(1+i+x))^{3/2}} \; dx \; . \tag{11}$$

Для выбора одной из рекурренций программа сравнивает подынтегральное выражение с выписанным выше стандартным видом и устанавливает, что $m = 1$ и $n = -3/2$. Так как $n \leq -1$, мы выбираем рекурренцию (20). В этом случае $Ab^2 - abB + a^2C = 0$, и рекурренцию удается упростить дальше. Мы получаем

$$-\frac{1}{13}\int \frac{\tan(1+i+x)(-26 + 39\tan(1+i+x))}{\sqrt{2 - 3\tan(1+i+x)}} \; dx \; . \tag{12}$$

Наш выбор констант позволяет алгебраически упростить подынтегральное выражение. На практике этот шаг выполняется, не обращаясь к процедурам упрощения, встроенных в выбранную систему компьютерной алгебры. Он задается внутри нашей системы в виде отдельного правила. Это вызвано тем, что упрощение, встроенное в систему компьютерной алгебры, будет игнорировать наш эстетический принцип работы с уже присутствующими в подынтегральном выражении функциями, в нашем случае — с тангенсом. Получается

$$\int \tan(1+i+x)\sqrt{2 - 3\tan(1+i+x)} \, dx, \tag{13}$$

что можно переписать как

$$dn \int T_1 T_2^n \, dx \longrightarrow T_2^n - dn \int T_2^{n-1} T_3(b, -a, 0) \, dx \; ,$$

что преобразуется в

$$\int \frac{3 + 2\tan(1+i+x)}{\sqrt{2 - 3\tan(1+i+x)}} \, dx + 2\sqrt{2 - 3\tan(1+i+x)} \; . \tag{14}$$

Следующим используется правило: если $A^2 + B^2 \neq 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$, то

$$\begin{aligned} &\int \frac{A + B\tan(c+dx)}{\sqrt{a + b\tan(c+dx)}} \, dx \longrightarrow \\ &\frac{1}{2}(A - Bi)\int \frac{1 + i\tan(c+dx)}{\sqrt{a + b\tan(c+dx)}} \, dx + \\ &\frac{1}{2}(A + Bi)\int \frac{1 - i\tan(c+dx)}{\sqrt{a + b\tan(c+dx)}} \, dx. \end{aligned} \tag{15}$$

Далее выполняется алгебраическое преобразование, допустимое при $A^2 + B^2 \neq 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$:

$$\begin{aligned} &\int \frac{A + B\tan(c+dx)}{\sqrt{a + b\tan(c+dx)}} \, dx \longrightarrow \\ &-\frac{2B \operatorname{arctanh}\left[\frac{\sqrt{a+b\tan(c+dx)}}{\sqrt{a+\frac{bA}{B}}}\right]}{d\sqrt{a + \frac{bA}{B}}}. \end{aligned} \tag{16}$$

Это правило использовано повторно для получения окончательного результата

$$\begin{aligned} &+ 2\sqrt{2 - 3\tan(1+i+x)} \\ &- \sqrt{2 - 3i}\,\operatorname{arctanh}\left[\frac{\sqrt{2 - 3\tan(1+i+x)}}{\sqrt{2 - 3i}}\right] \\ &- \sqrt{2 + 3i}\,\operatorname{arctanh}\left[\frac{\sqrt{2 - 3\tan(1+i+x)}}{\sqrt{2 + 3i}}\right]. \end{aligned}$$

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Хотя целью проекта является создание репозитория правил интегрирования, который был бы независим от выбранной системы компьютерной алгебры, в настоящее время выбор системы влияет на форму некоторых правил. Первый шаг в выборе подходящего правила — это распознавание структуры подынтегрального выражения, и лежащие в основе распознавания функции системы будут влиять на выбор правил. Например, в системе MATHEMATICA $(\sin(c+dx))^{-1}$ имеет внутреннее представление $\csc(c+dx)$, и $\tan(c+dx)^{-1}$ — внутреннее представление $\cot(c+dx)$. Таким образом, надо уметь работать и с тангенсом, и с котангенсом (другие модули должны содержать записи для синуса и косеканса). Система, которая хранит обратные функции по-другому, возможно, потребует изменения базы данных.

Во-вторых, система влияет на репозиторий через упрощение. Мы уже отмечали, что некоторые алгебраические упрощения записаны в нашей системе как правила преобразования, так как в противном случае встроенный в систему способ упрощения уничтожил бы шаблон, предпочтительный для нас. Невозможность объяснить системе наши требования заставляет нас включать алгебраические упрощения в наш репозиторий, что существенно увеличивает его размер.

7. ПРИЛОЖЕНИЕ

Перечислим рекурренции, используемые в схеме интегрирования [10]. Для экономии места будем использовать обозначения

$$T_1 = \tan(c+dx)\ , \qquad T_2 = a + b\tan(c+dx)\ ,$$
$$T_3(A,B,C) = A + B\tan(c+dx) + C\tan^2(c+dx)\ .$$

Следующие рекурренции справедливы для всех $A, B, C \in \mathbb{C}$:

$$d(m+1)\int T_1^m T_2^n T_3(A,B,C)\,dx = \tag{17}$$
$$AT_1^{m+1}T_2^n + d\int T_1^{m+1}T_2^{n-1}T_3(\hat{A},\hat{B},\hat{C})\,dx\ ,$$
$$\hat{A} = aB(m+1) - Abn\ ,$$
$$\hat{B} = (bB - aA + aC)(m+1)\ ,$$
$$\hat{C} = bC(m+1) - Ab(m+n+1)\ .$$

$$d(m+n+1)\int T_1^m T_2^n T_3(A,B,C)\,dx = \tag{18}$$
$$CT_1^{m+1}T_2^n + d\int T_1^m T_2^{n-1}T_3(\hat{A},\hat{B},\hat{C})\,dx\ ,$$
$$\hat{A} = Aa(m+n+1) - C(m+1)a\ ,$$
$$\hat{B} = (aB + bA - bC)(m+n+1)\ ,$$
$$\hat{C} = aCn + bB(m+n+1)\ .$$

$$bd(n+1)\left(a^2+b^2\right)\int T_1^m T_2^n T_3\,dx = \tag{19}$$
$$\left(Ab^2 - abB + a^2C\right)T_1^m T_2^{n+1} + d\int T_1^{m-1}T_2^{n+1}\hat{T}_3\,dx\ ,$$
$$\hat{A} = -\left(Ab^2 - abB + a^2C\right)m\ ,$$
$$\hat{B} = b(bB + aA - aC)(n+1)\ ,$$
$$\hat{C} = (m+n+1)(aB - Ab)b - ma^2C + (n+1)b^2C\ .$$

$$ad(n+1)\left(a^2+b^2\right)\int T_1^m T_2^n T_3\,dx = \tag{20}$$
$$-\left(Ab^2 - abB + a^2C\right)T_1^{m+1}T_2^{n+1} + d\int T_1^m T_2^{n+1}\hat{T}_3\,dx$$
$$\hat{A} = A\left(a^2(n+1) + b^2(m+n+2)\right)$$
$$-a(bB - aC)(m+1)\ , \hat{B} = a(aB - bA + bC)(n+1),$$
$$\hat{C} = \left(Ab^2 - abB + a^2C\right)(m+n+2)\ .$$

$$bd(m+n+1)\int T_1^m T_2^n T_3(A,B,C)\,dx = \tag{21}$$
$$CT_1^m T_2^{n+1} - d\int T_1^{m-1}T_2^n\hat{T}_3\,dx\ ,$$
$$\hat{A} = aCm\ , \quad \hat{B} = b(C-A)(m+n+1)\ ,$$
$$\hat{C} = aCm - bB(m+n+1)\ .$$

$$ad(m+1)\int T_1^m T_2^n T_3(A,B,C)\,dx = \tag{22}$$
$$AT_1^{m+1}T_2^{n+1} + d\int T_1^{m+1}T_2^n\hat{T}_3\,dx\ ,$$
$$\hat{A} = aB(m+1) - Ab(m+n+2)\ ,$$
$$\hat{B} = -a(A-C)(m+1)\ , \quad \hat{C} = -Ab(m+n+2)\ .$$

Рекурренции (23) — (28) требуют выполнения условий $a^2+b^2=0$. Третий аргумент выражения T_3 всегда равен 0.

$$d(m+1)\int T_1^m T_2^n T_3(A,B,0)\,dx = \tag{23}$$
$$AaT_1^{m+1}T_2^{n-1} - d\int T_1^{m+1}T_2^{n-1}T_3(\hat{A},\hat{B},0)\,dx\ ,$$
$$\hat{A} = Ab(n-1) - (Ab + Ba)(m+1)\ ,$$
$$\hat{B} = Aa(m+n) - Bb(m+1)\ .$$

$$d(m+n)\int T_1^m T_2^n T_3(A,B,0)\,dx = \tag{24}$$
$$BbT_1^{m+1}T_2^{n-1} + d\int T_1^m T_2^{n-1} T_3(\hat{A},\hat{B},0)\,dx\ ,$$
$$\hat{A} = Aa(n+m) - Bb(m+1)\ ,$$
$$\hat{B} = Ba(n-1) + (Ab+Ba)(m+n)\ .$$

$$2a^2nd\int T_1^m T_2^n T_3(A,B,0)\,dx = \tag{25}$$
$$BbT_1^m T_2^n + d\int T_1^{m-1} T_2^{n+1} T_3(\hat{A},\hat{B},0)\,dx\ ,$$
$$\hat{A} = (Ab-Ba)m\ , \quad \hat{B} = Bb(m-n) + Aa(m+n)\ .$$

$$2a^2nd\int T_1^m T_2^n T_3(A,B,0)\,dx = \tag{26}$$
$$-\,a(aA+bB)T_1^{m+1}T_2^n + d\int T_1^m T_2^{n+1} \hat{T}_3(\hat{A},\hat{B},0)\,dx\ ,$$
$$\hat{A} = bB(m+1) + aA(m+2n+1)\ ,$$
$$\hat{B} = (aB-Ab)(m+n+1)\ .$$

$$ad(m+n)\int T_1^m T_2^n T_3(A,B,0)\,dx = \tag{27}$$
$$aBT_1^m T_2^n + d\int T_1^{m-1} T_2^n \hat{T}_3(\hat{A},\hat{B},0)\,dx\ ,$$
$$\hat{A} = -aBm\ , \quad \hat{B} = Aam + (Aa-Bb)n\ .$$

$$ad(m+1)\int T_1^m T_2^n T_3(A,B,0)\,dx = \tag{28}$$
$$aAT_1^{m+1}T_2^n + d\int T_1^{m+1} T_2^n \hat{T}_3(\hat{A},\hat{B},0)\,dx\ ,$$
$$\hat{A} = Abn - Ba(m+1)\ , \quad \hat{B} = Aa(m+n+1)\ .$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. B. Buchberger. Mathematica as a Rewrite Language. In T. Ida, A. Ohori, and M. Takeichi, editors, *Functional and Logic Programming (Proceedings of the 2nd Fuji International Workshop on Functional and Logic Programming, November 1-4, 1996, Shonan Village Center)*, pages 1–13. Copyright: World Scientific, Singapore - New Jersey - London - Hong Kong, 1996.

2. Richard J. Fateman. A review of Mathematica. *J. Symb. Computation*, 13(5):545–579, 1992.

3. G. H. Hardy. *A mathematician's apology*. Canto. Cambridge University Press, 2012.

4. D. J. Jeffrey. Integration to obtain expressions valid on domains of maximum extent. In Manuel Bronstein, editor, *ISSAC '93: Proceedings of the 1993 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 34–41. ACM Press, 1993.

5. Daniel Lazard and Renaud Rioboo. Integration of rational functions: Rational computation of the logarithmic part. *J. Symb. Computation*, 9:113–115, 1990.

6. A. D. Rich and D. J. Jeffrey. A knowledge repository for indefinite integration based on transformation rules. In *Intelligent Computer Mathematics*, volume 5625 of *LNCS*, pages 480–485. Springer, 2009.

7. Robert H. Risch. The problem of integration in finite terms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 139:167–189, 1969.

8. Michael Rothstein. A new algorithm for the integration of exponential and logarithmic functions. In *Proceedings of the 1977 MACSYMA users conference*, pages 263–274, 1977.

9. Barry M. Trager. Algebraic factoring and rational function integration. In R. D. Jenks, editor, *Proceedings of the 1976 ACM Symposium on symbolic and algebraic computation SYMSAC '76*, pages 219–226. ACM Press, 1976.

10. Detmar Martin Welz. Recurrence relations for tangent integrals. Personal Communication, 2011.