This paper was published in the journal *Comptes Rendus de L'Académie des Sciences, Paris*, **320**, Série I (1995) 1449–1452.

Sur l'inversion de $y^\alpha e^y$ au moyen des nombres de Stirling associés

David J. Jeffrey, Robert M. Corless, David E. G. Hare, et Donald E. Knuth

Résumé — La fonction $y = \Phi_\alpha(x)$, solution de $y^\alpha e^y = x$ pour x, y assez grands, possède un développement suivant les puissances de $\ln x$ et $\ln\ln x$ dont les coefficients font intervenir les nombres orbites de Stirling. Il est montré que ce développement converge lorsque $x > (\alpha e)^\alpha$, $\alpha \geq 1$. Il est aussi démontré que de nouveaux développements utilisant les nombres de Stirling associés peuvent être obtenus pour Φ_α. Ces nouveaux développements convergent plus rapidement et sur un domaine élargi.

On the inversion of $y^\alpha e^y$ in terms of associated Stirling numbers

Abstract — The function $y = \Phi_\alpha(x)$, the solution of $y^\alpha e^y = x$ for x and y large enough, has a series expansion in terms of $\ln x$ and $\ln\ln x$, with coefficients given in terms of Stirling cycle numbers. It is shown that this expansion converges for $x > (\alpha e)^\alpha$ for $\alpha \geq 1$. It is also shown that new expansions can be obtained for Φ_α in terms of associated Stirling numbers. The new expansions converge more rapidly and on a larger domain.

1. Nombres de Stirling — Les nombres orbites de Stirling $\left[{n \atop m}\right]$ sont définis [1] par la formule

$$\ln^m(1+z) = m! \sum_n (-1)^{n+m} \left[{n \atop m}\right] \frac{z^n}{n!} . \tag{1a}$$

Les nombres $(-1)^{n+m}\left[{n \atop m}\right]$ sont aussi appelés nombres de Stirling de première espèce [8]. Les nombres partitions de Stirling $\left\{{n \atop m}\right\}$, aussi appelé nombres de Stirling de deuxième espèce, sont eux définis par

$$(e^z - 1)^m = m! \sum_n \left\{{n \atop m}\right\} \frac{z^n}{n!} , \tag{1b}$$

et les nombres partitions de Stirling 2-associés $\left\{{n \atop m}\right\}_{\geq 2}$ par [2] exercice 5.7; [7] p. 296; [9] §4.5

$$(e^z - 1 - z)^m = m! \sum_n \left\{{n \atop m}\right\}_{\geq 2} \frac{z^n}{n!} . \tag{1c}$$

2. Solution par Comtet de $y^\alpha e^y = x$. — Le nombre réel α étant fixé, appelons $\Phi_\alpha(x)$ la valeur de y qui est l'unique solution positive de l'équation $y^\alpha e^y = x$. Si $\alpha < 0$, alors $y > -\alpha$ et $x > e^{-\alpha}(-\alpha)^\alpha$. Le théorème suivant ([3], [5]) nous fournit un développement asymptotique de $\Phi_\alpha(x)$ utilisant les nombres orbites de Stirling et les fonctions $L_1 = \ln x$ and $L_2 = \ln\ln x$.

Théorème 1. — *Avec les notations précédentes, la fonction $\Phi_\alpha(x)$ admet le développement suivant, convergent si x est assez grand,*

$$\Phi_\alpha(x) = L_1 - \alpha L_2 + \alpha \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha^n}{L_1^n} \sum_{m=1}^{n} (-1)^{n+m} \left[{n \atop n-m+1}\right] \frac{L_2^m}{m!} . \tag{2a}$$

Démonstration. – Nous rappelons quelques détails de la preuve que l'on retrouve dans [5], car ils nous serviront plus loin. Nous introduisons la fonction $w(x)$ définie par

$$y = \Phi_\alpha(x) = L_1 - \alpha L_2 + \alpha w \,, \tag{2b}$$

et qui satisfait donc à

$$1 - e^{-w} + \sigma w - \tau = 0, \qquad \sigma = \frac{\alpha}{L_1}, \qquad \tau = \alpha \frac{L_2}{L_1} = \sigma \ln\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) \,. \tag{2c}$$

De la formule d'inversion de Lagrange [4], nous obtenons le développement

$$w = \sum_{m \geq 1} \frac{\tau^m}{m!} \sum_{l \geq 0} (-1)^l \begin{bmatrix} l+m \\ l+1 \end{bmatrix} \sigma^l \,. \tag{2d}$$

Il suffit d'exprimer σ et τ en fonction de L_1 and L_2 pour obtenir le théorème.

Le domaine de convergence de $(2a)$ est décrit seulement comme ≪ x assez grand ≫ par de Bruijn et Comtet. Nous énonçons donc maintenant un théorème plus précis.

Théorème 2. — *Pour $\alpha \geq 1$, la série (2a) est convergente si $x > (\alpha e)^\alpha$, tandis que pour $\alpha < 1$, elle est convergente si $x > e$.*

Démonstration abrégée. – Introduisons les fonctions $f(w) = \sigma w - \tau$ et $g(w) = 1 - e^{-w}$. Pour $\alpha > 1$ et $x > (\alpha e)^\alpha$, définissons $\delta > 0$ par $\delta = 1 - \ln(\alpha e)^\alpha / \ln x$, et donc nous avons $\sigma = (1-\delta)/(1+\ln\alpha)$. Posons $w_0 = \ln(1+\ln\alpha)$. Sur le contour rectangulaire composé des lignes $\Re(w) = w_0 + \delta$, $\Im(w) = \pm 2\delta^{1/2}$, et $\Re(w) = -2$, l'on montre que $|g| > |f|$, et donc, par le théorème de Rouché, $f + g$ ne possède qu'une seule racine à l'intérieur du contour. Utilisant le théorème de Cauchy pour représenter cette racine au moyen d'une intégrale prise sur le contour, nous obtenons la convergence de $(2a)$ en développant l'intégrande suivant les puissances de f/g et en intégrant terme à terme [3]. Pour $\alpha < 1$, le contour doit être le même que celui utilisé dans le cas $\alpha = 1$.

3. Nouveau développement. — Étant donné la relation

$$\Phi_\alpha(x) = \alpha \Phi_1\left(\frac{x^{1/\alpha}}{\alpha}\right) = \alpha W\left(\frac{x^{1/\alpha}}{\alpha}\right) \,,$$

où W est la fonction W de Lambert [6], nous pouvons à l'avenir simplifier nos équations en ne considérant que le cas $\alpha = 1$. À l'aide du changement de variable $\zeta = 1/(1+\sigma)$, nous obtenons une série pour $\Phi_1 = W$ qui converge sur un domaine plus grand que celui de $(2a)$.

Théorème 3. — *Avec les notations précédentes, $W(x)$ admet le développement*

$$W(x) = L_1 - L_2 + \sum_{m \geq 1} \frac{\tau^m}{m!} \sum_{p=0}^{m-1} (-1)^{p+m-1} \zeta^{p+m} \left\{ \begin{matrix} p+m-1 \\ p \end{matrix} \right\}_{\geq 2} \,, \tag{3a}$$

et cette série converge lorsque $x \geq 2$.

Démonstration. — Substituons $\sigma = 1/\zeta - 1$ dans $(2c)$ pour obtenir

$$\tau + e^{-w} - 1 + w - w/\zeta = 0 \,. \tag{3b}$$

Pour utiliser la formule d'inversion de Lagrange, introduisons l'opérateur $[w^p]$ qui représente le coefficient de w^p dans un développement en série suivant les puissances de w; nous obtenons

$$\begin{aligned} w &= \sum_{n\geq 1} \frac{\zeta^n}{n} \left[w^{n-1}\right] \left(\tau + e^{-w} - 1 + w\right)^n \ , \\ &= \sum_{n\geq 1} \frac{\zeta^n}{n} \left[w^{n-1}\right] \sum_m \binom{n}{m} \tau^m \left(e^{-w} - 1 + w\right)^{n-m} \ , \\ &= \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \zeta^n \sum_m \frac{\tau^m}{m!} \left\{ {n-1 \atop n-m} \right\}_{\geq 2} \ , \end{aligned}$$

et un réarrangement des termes donne la première partie du théorème.

Pour démontrer la convergence, posons $f(w) = \zeta(e^{-w} - 1 + w) + \tau\zeta$ et $g(w) = -w$. Sur le contour rectangulaire formé des quatre lignes $\Re(w) = 2$, $\Im(w) = \pm 2$ and $\Re(w) = -1$, on voit aisément que $|f| < |g|$ pour tout $x \in [2, e]$, et donc la série y est convergente. Notons qu'à l'aide de la relation

$$\left[{l \atop m} \right] = \sum_{p=0}^{l-m} (-1)^{p+l-m} \left\{ {p+l-m \atop p} \right\}_{\geq 2} \binom{p+l-1}{p+l-m} \ , \tag{3c}$$

on voit que ($3a$) est équivalent à ($2a$) lorsque $x > e$. Le théorème s'ensuit.

4. Développements au moyen de nouvelles variables. — On peut obtenir deux autres développements en introduisant les variables $L_\tau = \ln(1-\tau)$ et $\eta = \sigma/(1-\tau)$.

Théorème 4.—*Avec les notations précédentes, $W(x)$ admet le développement*

$$W(x) = L_1 - L_2 - L_\tau - \sum_{n\geq 1} (-\eta)^n \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \left[{n \atop n-m+1} \right] \frac{L_\tau^m}{m!} \ . \tag{4a}$$

Démonstration.— Posons $w = v - L_\tau$ dans ($2c$) et obtenons, après réarrangement,

$$1 - e^{-v} + \frac{\sigma}{1-\tau} v = \frac{\sigma}{1-\tau} L_\tau \ . \tag{4b}$$

Cette équation est exactement du même type que celle de ($2c$), et par conséquent le développement pour v s'obtient à l'aide de ($2d$) en remplaçant σ par $\sigma/(1-\tau)$ et τ par $\sigma L_\tau/(1-\tau)$. Un réarrangement des termes donne le théorème.

Le développement ($4a$) converge plus lentement que ($2a$), mais lorsque le transforme à l'aide des méthodes du théorème 3, on obtient un développement qui converge très rapidement, comme nous le démontrerons à la section 5.

Théorème 5.—*Avec les notations précédentes, $\Phi_1(x)$ admet le développement*

$$\Phi_1(x) = L_1 - L_2 - L_\tau + \sum_{m\geq 1} \frac{1}{m!} L_\tau^m \eta^m \sum_{p=0}^{m-1} (-1)^{p+m-1} \left\{ {p+m-1 \atop p} \right\}_{\geq 2} \frac{1}{(1+\eta)^{p+m}} \ , \tag{4c}$$

Démonstration. — La preuve est la même que celle du théorème 3.

Nous pouvons continuer le processus engendrant des séries en terme de nouvelles variables. En effet, si $w(\sigma,\tau)$ satisfait $(2c)$, alors le théorème 4 est équivalent à l'identité

$$w(\sigma,\tau) = -\ln(1-\tau) + w\left(\frac{\sigma}{1-\tau}, \frac{\sigma\ln(1-\tau)}{1-\tau}\right) , \tag{4d}$$

qui, clairement, peut être utilisée de façon répétitive.

5. Vitesse de convergence. — Considérons la précision obtenue par la troncation de chacune des séries $(2a)$, $(3a)$ et $(4c)$ après $N-1$ termes. Puisque chaque série est une série asymptotique, l'erreur lorsque x est très grand est $O(L_2^N/L_1^N)$ pour $(2a)$ et $(3a)$ et $O(L_2^N/L_1^{2N})$ pour (4c) respectivement, et donc $(4c)$ est clairement la meilleure. Ces séries sont mieux qu'asymptotiques: elles convergent absolument, et peuvent être utilisées pour des valeurs relativement petites de x. Observons que $\tau = L_\tau = 0$ à $x = e$, et donc tous les termes sous le signe de sommation dans $(2a)$, $(3a)$ et $(4c)$ sont égaux à zéro. Donc toutes ces séries tronquées seront à erreur nulle lorsque $x = e$ et asymptotiquement correctes lorsque $x \to \infty$, ce qui implique que l'erreur atteindra son maximum pour un certain $x > e$.

Toutefois, malgré que $(2a)$ soit exacte pour $x = e$, sa dérivée n'est pas convergente en ce point. Par contre, $(3a)$ et $(4c)$ donnent des sommes finies au point $x = e$ pour toutes les dérivées. Autrement dit, en prenant les N premiers termes de $(3a)$ ou de $(4c)$ et les développant autour de $x = e$, on obtient N termes de la série de taylor de $\Phi_1(x)$ au point $x = e$. $(3a)$ et $(4c)$ sont toutes les deux plus précises que $(2a)$ près de ce point. Des calculs numériques confirment ces résultats.

Nous conjecturons que (2a) et (4c) convergent pour tout $x > 1$.

Note remise le 23 mars 1995, acceptée le 27 mars 1995.

Références Bibliographiques

[1] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, 1994.
[2] L. Comtet, *Analyse Combinatoire*, 2, Presses Univ. de France, 1970.
[3] N. G. de Bruijn, *Asymptotic Methods in Analysis*, North-Holland, 1961.
[4] C. Carathéodory, *Theory of Functions of a Complex Variable*, Chelsea, 1954.
[5] L. Comtet, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 270, 1970, p. 1085–1088.
[6] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey and D. E. Knuth, "The Lambert W Function", Advances in Computational Mathematics, à paraître.
[7] F.N. David and D.E. Barton, *Combinatorial Chance*, Hafner, 1962.
[8] N. Nielsen, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Teubner, 1906.
[9] J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, Wiley, 1958.

D.J.J. et R.M.C.: Department of Applied Mathematics
The University of Western Ontario
London, CANADA, N6A 5B7

D.E.G.H.: Symbolic Computation Group
University of Waterloo
Waterloo, CANADA, N2L 3G1

D.E.K.: Department of Computer Science
Stanford University
Stanford, USA, 94305-2140